تأثير الشكل البياني للدالة على نتائج التكامل العددي المحدود للدوال الرياضية

د. هناء المنير أحمد لوكة^{1*} ، أ. منى السنوسي محمد أبو بكر²

^{2,1} كلية التربية أبو عيسى / جامعة الزاوية

* h.louka@zu.edu.ly

الملخص

يتلخص موضوع البحث في إلقاء الضوء على الشكل البياني للدالة وتأثيره على نتائج التكامل العددي المحدود، حيث تم أخذ أربعة أمثلة لمعرفة تأثير الشكل البياني للدالة على نتائج التكامل العددي المحدود، المثال الأول لدالة أسية، المثال الثاني والمثال الثالث لدالتين مثلثيتين دوريتين.

تم رسم هذه الدوال باستخدام برنامج Graph، وحساب القيم الدقيقة للتكاملات بالطريقة الرياضية المباشرة. بعدها تم حساب قيم التكاملات باستخدام ثلاثة طرق للتكامل العددي المحدود وهي:

طريقة شبه المنحرف، طريقة سمبسون، طريقة رومبيرج.

تم حساب قيمة الخطأ المطلق لكل طريقة للأمثلة الأربعة المذكورة أعلاه، وذلك لغرض دراسة النتائج ومقارنتها مع بعضها البعض وكانت النتائج مقربة إلى أربعة أرقام عشرية بعد الفاصلة.

ثم دُونت النتائج على شكل جدول لتسهيل عملية المقارنة، حيث وُجدت أن طريقة رومبيرج تعطي نتائج دقيقة جدًا إذا كانت كل قيم (x, y) تقع في الربع الأول تكون دقيقة جدًا ومدى تقاربها من القيم الحقيقية للتكامل هي الأفضل. بعدها تأتي طريقة شبه المنحرف من حيث قرب نتائج القيم التقريبية لتكامل الدوال الدورية من القيم الحقيقية.

Abstract:

This paper view shed light on the graph of the function and its effect on results of limited numerical integration. Where it was taken four limited integrals to know the effect the

graph of the function on the results of the limited integration, the first example is exponential function, the second example and third example are periodic triangle functions.

These functions are drawn by using Graph program, and we calculated these integrals using the direct mathematical method. Then we solved theses integrals using three numerical methods: Trapezoidal rule, Simpson's rule, Romberg rule.

We calculated the absolute errors for these examples in order to make a comparison between the results using direct and numerical methods the results were rounded to four decimal places after the comma.

The results were written in tabular format to facilitate comparison, to compute the numerical integration of the periodic functions we found the Romberg method gives very accurate results if all the values (x, y) located in the first quarter the results of the numerical integral are very accurate and their convergence with the real values of the integration is the best, after that comes Trapezoidal method.

مصطلحات البحث

الدالة: هي علاقة أو قاعدة تعني أن قيمة متغير معين تعتمد على قيمة متغير آخر أو أكثر من متغير، وإذا كانت f دالة نطاقها A فإن الرسم البياني لـ f هي مجموعة الأزواج المرتبة $\{(x, f(x)): x \in A\}$ معينة في المستوى الإحداثي (Anderson and Feil, 2005).

الدالة الدورية: نقول أن دالة f دالة دورية إذا وجد عدد موجب p بحيث: $f(t) = f(t + p)$ لأي عدد t ، وحسب هذا التعريف فإن دالة $\sin$ ، $\cos$ دوال دورية (Stewart, et. al., 2014).

التكامل العددي: إن المعنى الهندسي للتكامل المحدد هو قيمة المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ في الفترة $[a, b]$.

شكل (1): يبين التفسير الهندسي للتكامل المحدود.

ولهذا فإن فكرة التكامل العددي يعتمد على حساب تلك المساحة بطرق تقريبية وذلك بتقسيم الفترة $[a, b]$ الى عدد n من التقسيمات، قد تكون متساوية أو غير متساوية طبقاً لمتطلبات الطريقة العددية المستخدمة في التكامل بحيث يتم استبدال الدالة $f(x)$ بدالة أخرى من السهل تكاملها (فضيلة والرويعي، 2004).

الأساليب العددية للتكامل تعطي نتائج تقريبية تختلف في دقتها باختلاف الأسلوب المتبع، وبذلك فإنه هناك أخطاء مصاحبة لتلك الحلول، يعبر عنها بصور مختلفة (فضيلة والرويعي، 2004) هي:

• **الخطأ المطلق:** يعرف بأنه القيمة المطلقة للفرق بين القيمة المحسوبة والقيمة المضبوطة، أي أن:

الخطأ المطلق = | القيمة المحسوبة - القيمة المضبوطة |، فإذا رمزنا للقيمة الفعلية بالرمز x_0 ،

والقيمة التقريبية بالرمز x ، وبالتالي فإن الخطأ المطلق e_x يكون كالآتي:

$$e_x = |x_0 - x|$$

• **الخطأ النسبي:** ويعرف بأنه الخطأ المطلق مقسوماً على القيمة المضبوطة ويرمز له بالرمز δ_x :

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

المقدمة

يختلف الشكل البياني للدوال باختلاف نوعها فهناك دوال جبرية كالدوال الخطية، وهناك دوال غير جبرية كالدوال الأسية، المثلثية، إلى غير ذلك من الدوال الأخرى والجدول الآتي يوضح الشكل البياني لبعض الدوال والتي سيتم تناول بعض منها في هذا البحث:

جدول (1): يبين الرسوم البيانية لبعض الدوال

الدوال	الرسم البياني
الدوال الخطية $f(x) = mx + b$
دوال القوى $f(x) = x^n$
دوال الجذور $f(x) = \sqrt[n]{x}$

سيتم في هذا البحث معرفة مدى تأثير الشكل البياني للدوال على دقة ناتج التكامل التقريبي والذي سيتم إيجاده باستخدام بعض الطرق العددية والمتمثلة في طريقة شبه المنحرف، طريقة سمبسون، طريقة رومبيرج.

فالتكامل العددي يعالج إيجاد قيمة تقريبية للتكامل المحدد لدالة مستمرة $f(x)$ يكون على الشكل $I = \int_a^b f(x)dx$ ، عندما يكون إيجاد تكاملها المحدد بالطرق التحليلية المعروفة صعباً أو غير ممكن، أو أن تكون الصيغة التحليلية للدالة $f(x)$ غير معلومة وإنما يكون معلوم قيم الدالة عند عدد محدد من النقط أي $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (فضيلة والرويعي، 2004).

محاور البحث

المحور الأول: المتمثل في دراسة بعض الطرق العددية في حساب التكامل العددي المحدود

بعض الطرق العددية في حساب التكامل العددي المحدود

نعتبر التكاملات في بعد واحد من الشكل $I = \int_a^b f(x)dx$ ، عندما لا يمكن إجراء التكامل تحليلياً ويبقى لنا خيار وحيد لإجراء هذا التكامل والمتمثل في التكامل العددي، الخوارزميات التي سنستعملها هي: طريقة شبه المنحرف (صبح والحربي، 2006)، طريقة سمبسون (صبح والحربي، 2006)، طريقة رومبيرج (الطائي، 2010).

أولاً: التكامل العددي باستخدام طريقتي شبه المنحرف وسمبسون

في كلتا الحالتين نقسم مجال التعريف إلى n مجال طوله h كالتالي:

$$x_i = x_0 + ih, h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, x_n = b$$

• التكامل العددي باستخدام طريقة شبه المنحرف:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)] \\ &= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \end{aligned}$$

• التكامل العددي باستخدام طريقة سمبسون:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \dots + f(x_n)] \\ &= \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \text{يدرف } i}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ \text{يجوز } j}}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right] \end{aligned}$$

ملاحظة: إذا كان n (عدد الفترات) عدد فردي فإننا نطبق طريقة سمبسون على أكبر عدد زوجي من الفترات الجزئية ثم نطبق طريقة شبه المنحرف على الفترة الأخيرة.

ثانيًا: التكامل العددي باستخدام طريقة رومبيرج

يعتمد هذا التكامل بالمقام الأول على طريقة شبه المنحرف والتي تنص على تكامل الدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ بعد تقسيمها إلى n من الفترات الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ بالنقط x_i حيث $x_i - x_{i-1} = h$ و $x_0 = a, x_n = b$ باعتبار $h = \frac{b-a}{n}$ وبالتالي:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

حيث: $x_i = a + ih, a < \mu < b, h = \frac{b-a}{n}, h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k) \right]$$

وبالتالي:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$\begin{aligned} R_{2,1} &= \frac{h_2}{2} [f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)] \\ &= \frac{b-a}{4} \left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[R_{1,1} + h_1 f\left(a + \frac{1}{2} h_1\right) \right]$$

⋮

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right) h_k\right) \right], k = 2, 3, \dots, n$$

كما أنه يمكن استخدام العلاقة التالية للحصول على تكامل رومبيرج بصورة عامة:

$$R_{k+1,m+1} = R_{k+1,m} + \frac{1}{4^m - 1} [R_{k+1,m} - R_{k,m}], k = m, m+1, \dots$$

وفي هذا البحث سيتم الحساب من $R_{1,1}$ وحتى $R_{3,3}$ علماً بأنه كلما أوجدنا خطوات أخرى سنصل لدقة أعلى.

الرسم البياني لبعض الدوال باستخدام برنامج Graph

شكل (2): يبين التمثيل البياني للدالة e^x .

نلاحظ من خلال التمثيل البياني للدالة $y = e^x$ في الفترة $[a, b] = [0, 1]$ حيث $a = x_0$ ، $b = x_n$ إنها تقع في الربع الأول (موجبة).

شكل (3): يبين التمثيل البياني للدالة $s(x)$.

نلاحظ من خلال التمثيل البياني للدالة $y = \sin(x)$ في الفترة $[a, b] = [0, \pi]$ حيث $a = x_0$ ، $b = x_n$ أنها موجبة.

شكل (4): يبين التمثيل البياني للدالة $\cos(x)$.

نلاحظ من خلال التمثيل البياني للدالة $y = \cos(x)$ في الفترة $[a, b] = [0, 2\pi]$ حيث $a = x_0$ ، $b = x_n$ إن بعض قيم y سالبة وبعضها الآخر موجبة.

شكل (5): يبين التمثيل البياني للدالة $\ln(2 * x + 1)$.

نلاحظ من خلال التمثيل البياني للدالة $y = \ln(2 * x + 1)$ في الفترة $[a, b] = [2, 4]$ حيث $a = x_0$ ، $b = x_n$ إنها تقع في الربع الأول (موجبة).

المحور الثاني: إيجاد القيم الحقيقية والتقريبية لبعض التكاملات ومعرفة مدى تأثير الشكل البياني للدالة على دقة النتائج المتحصل عليها باستخدام بعض الطرق العددية

لنأخذ أربعة تطبيقات متنوعة الشكل الرياضي والبياني، وسنجد حلها وفق الطرق الرياضية المباشرة.

أولاً: حساب القيم الحقيقية الدقيقة

جدول (2): يبين تطبيقات عمليه للمحور الثاني لإيجاد التكامل الحقيقي لبعض الدوال

القيمة الحقيقية مقربة لأقرب أربع أرقام عشرية	التكامل
1.7183	$\int_0^1 e^x dx$
2	$\int_0^\pi \sin x dx$

0	$\int_0^{2\pi} \cos x dx$
3.8639	$\int_0^1 \ln(2x+1) dx$

والآن وبعد أن تم التمثيل البياني لبعض الدوال وأوجدنا تكاملها الدقيق سوف نقوم بحساب التكاملات العددية لتلك الدوال باستخدام بعض الطرق العددية وذلك لغرض معرفة تأثير الشكل البياني لتلك الدوال على النتائج المتحصل عليها من كل طريقة من طرق التكامل العددي المستخدمة في هذا البحث.

ثانيًا: حساب القيم التقريبية للتكامل باستخدام الطرق الثلاثة

1. طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون

• بتطبيق طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون لإيجاد $\int_0^1 e^x dx$ حيث $h = \frac{1}{6}$:

الصيغة العامة للتكامل باستخدام طريقة شبه المنحرف هي:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

جدول (3): يوضح القيم العددية ل $(x_i, f(x_i))$ عندما $h = \frac{1}{6}$

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$
	1	1.1814	1.3956	1.6487	1.9477	2.3010	2.7183

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{12} [1 + 2(1.1814 + 1.3956 + 1.6487 + 1.9477 + 2.3010) + 2.7183] = 1.7223$$

$$e_x = |x_0 - x| = |1.7182 - 1.7223| = |-0.0041| = 0.0041$$

بتطبيق طريقة سمبسون على هذا المثال نحصل على:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4)) \\ &\quad + f(x_6)] \\ &= \frac{1}{18} [1 + 4(1.1814 + 1.6487 + 2.3010) + 2(1.3956 + 1.9477) \\ &\quad + 2.7183] = 1.7182 \end{aligned}$$

$$\therefore e_x = |x_0 - x| = |1.7183 - 1.7182| = 0.0001$$

لاحظ في هذا المثال وجود فرق بسيط في القيم التقريبية المحسوبة باستخدام طريقة سمبسون عن القيم الحقيقية، ولكنه صغير جدا.

- بتطبيق طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون لإيجاد $\int_0^\pi \sin x dx$ حيث $n = 5$:
الصيغة العامة للتكامل باستخدام طريقة شبه المنحرف هي:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

$$\therefore n = 5, \therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi-0}{5} = \frac{\pi}{5}$$

جدول (4): يوضح القيم العددية لـ $(x_i, f(x_i))$ عندما $h = \frac{\pi}{5}$

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$
	0	0.5878	0.9511	0.5911	0.5878	0

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx \frac{\pi}{10} [0 + 2(2(0.5878) + 2(0.9511)) + 0] = 1.9338$$

$$e_x = |x_0 - x| = |2 - 1.9338| = 0.0662$$

وبما أن عدد الفترات الجزئية خمسة (فردى) نطبق طريقة سمبسون على أربع فترات جزئية، ثم نطبق طريقة شبه المنحرف على الفترة الأخيرة كما يلي:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2(f(x_2)) + f(x_4)] \\ &\quad + \frac{h}{2} [f(x_4) + f(x_5)] \\ &= \frac{\pi}{15} [0 + 4(0.5878 + 0.9511) + 2(0.5911) + 0.5878] \\ &\quad + \frac{\pi}{10} [0.5878 + 0] = 1.8446 \end{aligned}$$

$$\therefore e_x = |x_0 - x| = |2 - 1.8446| = 0.1554$$

نلاحظ أن طريقة شبه المنحرف أعطت نتيجة أدق من طريقة سمبسون حيث كان ناتج التكامل التقريبي باستخدام طريقة شبه المنحرف يساوي (1.9338)، أما ناتج التكامل الدقيق يساوي (2).

• بتطبيق طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون $\int_0^{2\pi} \cos x dx$ حيث $n = 7$:

الصيغة العامة للتكامل باستخدام طريقة شبه المنحرف هي:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

$$\because n = 7, \therefore h = \frac{b - a}{n} = \frac{2\pi - 0}{7} = \frac{2\pi}{7}$$

جدول (5): يوضح القيم العددية ل $(x_i, f(x_i))$ عندما $h = \frac{2\pi}{7}$

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{4\pi}{7}$	$\frac{6\pi}{7}$	$\frac{8\pi}{7}$	$\frac{10\pi}{7}$	$\frac{12\pi}{7}$	π
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$
	1	0.6235	-0.2225	-0.9010	-0.9010	-0.2225	0.6235	1

$$\therefore \int_0^{2\pi} \cos x dx \approx \frac{2\pi}{14} [1 + 2(2(0.6235 - 0.2225 - 0.9010)) + 1] = 0$$

$$e_x = |x_0 - x| = |0 - 0| = 0$$

إن تساوي القيم الحقيقية مع القيم التقريبية في هذا المثال ليس دقيقاً تماماً بل هناك فرق صغير جداً.

وبما أن عدد الفترات الجزئية سبعة (فردية) نطبق طريقة سمبسون على ست فترات جزئية، ثم نطبق طريقة شبه المنحرف على الفترة الأخيرة كما يلي:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos x \, dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4)) \\
&\quad + f(x_6)] + \frac{h}{2} [f(x_6) + f(x_7)] \\
&= \frac{2\pi}{21} [1 + 4(0.6235 - 0.9010 - 0.2225) + 2(-0.2225 - 0.9010) \\
&\quad + 0.6235] + \frac{2\pi}{14} [0.6235 + 1] = -0.0563
\end{aligned}$$

وفي هذا المثال نجد أن طريقة شبه المنحرف أعطت نتيجة أدق من طريقة سمبسون حيث كان ناتج التكامل التقريبي باستخدام طريقة شبه المنحرف يساوي (0.0001)، أما ناتج التكامل الدقيق يساوي (0)، وبالتالي ستكون قيمة الخطأ المطلق:

$$e_x = |x_0 - x| = |0 + 0.0563| = 0.0563$$

- بتطبيق طريقة شبه المنحرف $\int_2^4 \ln(2x+1)dx$ بطريقة أشباه المنحرفات حيث $h = 1$:
الصيغة العامة للتكامل باستخدام طريقة شبه المنحرف هي:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

جدول (6): يوضح القيم العددية ل $(x_i, f(x_i))$ عندما $h = 1$

x_i	x_0	x_1	x_2
	2	3	4
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
	1.6094	1.9459	2.1972

$$\therefore \int_2^4 \ln(2x+1)dx \cong \frac{1}{2} [1.6094 + 2(1.9459) + 2.1972] = 3.8492$$

وفي هذا المثال المقدار الدقيق للتكامل يساوي (3.8492) وبالتالي ستكون قيمة الخطأ:

$$e_x = |x_0 - x| = |3.8639 - 3.8492| = 0.0147$$

ملاحظة: إن قيمة الخطأ النسبي ستكون صغيرة جدا في حالة زيادة عدد الشرائح أكثر فأكثر، وسنتمكن من إثبات ذلك بشكل نظري من خلال حل أحد الأمثلة مرتين فيهما عدد الشرائح مختلف، لنشاهد مدى دقة الحل وقربه من النتائج المضبوطة.

بتطبيق قاعدة سمبسون نحصل على:

$$\int_2^4 \ln(2x + 1) dx \cong \frac{1}{3} [1.6094 + 4(1.9459) + 2.1972] = 3.8634$$

وبالتالي ستكون قيمة الخطأ المطلق:

$$e_x = |x_0 - x| = |3.8639 - 3.8634| = 0.0005$$

2. طريقة رومبيرج

• بتطبيق طريقة رومبيرج لإيجاد $\int_0^1 e^x dx$ سنستخدم قاعدة شبه المنحرف في الخطوة الأولى للتكامل

بطريقة رومبيرج لتقريب التكامل $\int_0^1 e^x dx$ بأخذ $k = 4$ ، حيث $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ نجد أن:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] = \frac{1}{2} [1 + e^1] = 1.8591$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[R_{1,1} + h_1 f\left(a + \frac{1}{2} h_1\right) \right] = R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[1.8591 + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = 1.7539$$

$$\begin{aligned} R_{3,1} &= \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + h_2 \left[f\left(a + \frac{1}{2} h_2\right) + f\left(a + \frac{3}{2} h_2\right) \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1.7539 + \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] \right] = 1.7272 \end{aligned}$$

$$R_{k+1,m+1} = R_{k+1,m} + \frac{1}{4^{m-1}} [R_{k+1,m} - R_{k,m}] \quad \text{ثم نحسب } R_{k+1,m+1} \text{ من المعادلة}$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3} [R_{2,1} - R_{1,1}] = 1.7539 + \frac{1}{3} [1.7539 - 1.8591] = 1.7188$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3} [R_{3,1} - R_{2,1}] = 1.7272 + \frac{1}{3} [1.7272 - 1.7539] = 1.7183$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15} [R_{3,2} - R_{2,2}] = 1.7183 + \frac{1}{15} [1.7183 - 1.7188] \\ = 1.7183$$

$$\therefore e_x = |x_0 - x| = |1.7183 - 1.7183| = 0$$

إن تساوي القيم الحقيقية مع القيم التقريبية في هذا المثال ليس دقيقاً تماماً بل هناك فرق صغير جداً، ولكن النتائج المتحصل عليها بهذه الطريقة هي أقرب للقيم الدقيقة من الطرق المستخدمة في هذا البحث.

- بتطبيق طريقة رومبيرج لإيجاد $\int_0^\pi \sin x \, dx$ سنستخدم قاعدة شبه المنحرف في الخطوة الأولى للتكامل بطريقة رومبيرج لتقريب التكامل $\int_0^\pi \sin x \, dx$ بأخذ $k = 4$ ، حيث $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ نجد أن:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{1}{2} [f(0) + f(\pi)] = \frac{\pi}{2} [\sin(0) + \sin(\pi)] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[R_{1,1} + h_1 f\left(a + \frac{1}{2} h_1\right) \right] = \frac{1}{2} \left[0 + \pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1.5708$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + h_2 \left[f\left(a + \frac{1}{2} h_2\right) + f\left(a + \frac{3}{2} h_2\right) \right] \right] \\ = \frac{1}{2} \left[1.5708 + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] = 1.8961$$

$$R_{k+1,m+1} = R_{k+1,m} + \frac{1}{4^{m-1}} [R_{k+1,m} - R_{k,m}] \quad \text{ثم نحسب } R_{k+1,m+1} \text{ من المعادلة}$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}[R_{2,1} - R_{1,1}] = 1.5708 + \frac{1}{3}[1.5708 - 0] = 2.0944$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}[R_{3,1} - R_{2,1}] = 1.8961 + \frac{1}{3}[1.8961 - 1.5708] = 2.0045$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15}[R_{3,2} - R_{2,2}] = 2.0045 + \frac{1}{15}[2.0045 - 2.0944] \\ = 1.9985$$

$$\therefore e_x = |x_0 - x| = |2 - 1.9985| = 0.0015$$

• بتطبيق طريقة رومبيرج لإيجاد $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$ سنستخدم قاعدة شبه المنحرف في الخطوة الأولى للتكامل بطريقة رومبيرج لتقريب التكامل $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$ بأخذ $k = 4$ ، حيث $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ نجد أن:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \pi[f(0) + f(2\pi)] = \pi[\cos(0) + \cos(2\pi)] = 2\pi \\ = 6.2832$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h_1 f\left(a + \frac{1}{2}h_1\right)\right] = \frac{1}{2}[2\pi + 2\pi \cos(\pi)] = 0$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + h_2\left[f\left(a + \frac{1}{2}h_2\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h_2\right)\right]\right] \\ = \frac{1}{2}\left[0 + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \pi \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 0$$

$$R_{k+1,m+1} = R_{k+1,m} + \frac{1}{4^{m-1}}[R_{k+1,m} - \text{من المعادلة } R_{k+1,m+1} \text{ نحسب } R_{k,m}]$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}[R_{2,1} - R_{1,1}] = 0 + \frac{1}{3}[0 - 6.2832] = -2.0944$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}[R_{3,1} - R_{2,1}] = 0 + \frac{1}{3}[0 - 0] = 0$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15} [R_{3,2} - R_{2,2}] = 0 + \frac{1}{15} [0 + 2.0944] = 0.1396$$

$$\therefore e_x = |x_0 - x| = |0 - 0.1396| = 0.1396$$

• بتطبيق طريقة رومبيرج لإيجاد $\int_2^4 \ln(2x+1)dx$ سنستخدم قاعدة شبه المنحرف في الخطوة الأولى

للتكامل بطريقة رومبيرج لتقريب التكامل $\int_2^4 \ln(2x+1)dx$ بأخذ $k = 4$ يؤدي إلى:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)] = \frac{2}{2} [f(2) + f(4)] = 3.8067$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2} \left[R_{1,1} + h_1 f\left(a + \frac{1}{2}h_1\right) \right] = \frac{1}{2} [3.8076 + 2f(3)] = 3.8492$$

$$\begin{aligned} R_{3,1} &= \frac{1}{2} \left[R_{2,1} + h_2 \left[f\left(a + \frac{1}{2}h_2\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h_2\right) \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3.8492 + \left[f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) \right] \right] = 3.8602 \end{aligned}$$

ثم نحسب $R_{k+1,m+1}$ من المعادلة $R_{k+1,m+1} = R_{k+1,m} + \frac{1}{4^{m-1}} [R_{k+1,m} - R_{k,m}]$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3} [R_{2,1} - R_{1,1}] = 3.8492 + \frac{1}{3} [3.8492 - 3.8067] = 3.8634$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3} [R_{3,1} - R_{2,1}] = 3.8602 + \frac{1}{3} [3.8602 - 3.8492] = 3.8639$$

$$\begin{aligned} R_{3,3} &= R_{3,2} + \frac{1}{15} [R_{3,2} - R_{2,2}] = 3.8639 + \frac{1}{15} [3.8639 - 3.8634] \\ &= 3.8639 \end{aligned}$$

وستكون قيمة الخطأ المطلق كما يلي:

$$e_x = |x_0 - x| = |3.8639 - 3.8639| = 0$$

وكما ذكرنا سابقاً إن تساوي القيم الحقيقية مع القيم التقريبية في هذا المثال ليس دقيقاً تماماً بل هناك فرق صغير جداً، ولكن النتائج المتحصل عليها بهذه الطريقة هي أقرب للقيم الدقيقة من الطرق المستخدمة في هذا البحث.

الاستنتاجات والتوصيات

لأجل مقارنة النتائج ومعرفة تأثير شكل الدالة على هذه النتائج لهذه الطرق العددية لنكتبها على شكل جدول ليتسنى لنا ملاحظة الفرق بينها من حيث تقارب القيم التقريبية مع القيم الحقيقية:

جدول (7): يبين القيم الحقيقية والتقريبية للتكاملات

الدالة	القيم الحقيقية	القيم التقريبية		
		شبه المنحرف	سمبسون	رومبيرج
$\int_0^1 e^x dx$	1.7183	1.7223	1.7182	1.7183
$\int_0^\pi \sin x dx$	2	1.9338	1.8446	1.9985
$\int_0^{2\pi} \cos x dx$	0	0	-0.0563	0.1396
$\int_2^4 \ln(2x+1) dx$	3.8639	3.8492	3.8634	3.8639

جدول (8): يبين نسبة الخطأ للتكاملات

الدالة	نسبة الخطأ المحسوبة بالطرق المشروحة سابقاً		
	شبه المنحرف	سمبسون	رومبيرج
$\int_0^1 e^x dx$	0.0041	0.0001	0
$\int_0^\pi \sin x dx$	0.0662	0.1554	0.0015

0.1396	0.0563	0	$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$
0	0.0005	0.0147	$\int_2^4 \ln(2x+1) \, dx$

وبعد أن تم التمثيل البياني لبعض الدوال مختلفة النوع وحساب تكاملها تحليليًا وعدديًا تم التوصل إلى النتائج التالية:

1. إذا كانت كل قيم (x, y) تقع في الربع الأول، فإن ناتج التكامل العددي لأي داله باستخدام طريقة رومبيرج في الفترة $[a, b]$ تكون دقيقة جدًا ومدى تقاربها من القيم الحقيقية للتكامل هي الأفضل.

2. إن استخدام طريقة شبه المنحرف لحساب التكامل العددي في حال كانت الدالة دورية يعطي نتيجة أدق وأقرب للتكاملات الحقيقية من طريقة سمبسون، وهذا يخالف بعض النتائج التي توصل إليها الباحث كمال حميد الطائي في بحثه دراسة مقارنة لطرق التكامل العددي المحدود باستخدام برنامج MATLAB.

3. تساوي القيم الحقيقية مع التقريبية للتكاملات لا يعني أن الطريقة العددية التي تم استخدامها لإيجاد تلك التكاملات دقيقة مئة في المئة حيث إنه تم تقريب النتائج الحسابية لأربعة أرقام عشرية بعد الفاصلة.

المراجع

1- المراجع العربية:

- فضيلة، سعد محمد؛ الرويعي، النفاتي معمر (2004). التحليل العددي للمهندسين، ط1، طرابلس: منشورات مكتب البحوث والاستشارات الهندسية - كلية الهندسة - جامعة الفاتح، ص 33؛ ص261-262.
- صبح، محمد منصور، الحربي، صالح بن منيع (2006). التحليل العددي وطرق حسابه العددية، ط1، المملكة العربية السعودية: مكتبة الراشد للنشر، ص246-253.

- الطائي، كمال حميد (2010). دراسة مقارنة لطرق التكامل العددي المحدود باستخدام برنامج MATLAB، مجلة كلية التراث الجامعة، العدد ، ص86-122.

2- المراجع الأجنبية:

- Anderson M and Feil T (2005). A First Course in Abstract Algebra: Rings, Groups and Fields, 2nd Ed, published by CRC press p.73.
- Stewart J; Redlin L and Saleem Watson (2014). Precalculus: Cengage Learning Mathematics for Calculus, 6th Ed, published by Brooks/Cole, p.398.